Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Los espacios de Morrey

Zorko, Cristina Teresa

1984

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Zorko, Cristina Teresa. (1984). Los espacios de Morrey. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1919_Zorko.pdf

Cita tipo Chicago:

Zorko, Cristina Teresa. "Los espacios de Morrey". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1984.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1919_Zorko.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

LOS ESPACIOS DE MORREY

Cristina T. Zorko

Trabajo presentado para optar al título de Dr. en Ciencias Matemáticas.

Director: Dr. Josefina D. Alvarez Alonso

1919

-1984-

Indice

1. Introducción.

Para $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset R^n$ abierto y acotado, $0 < \lambda < n$, se consideran funciones $f(x)$ p-integrables en Ω que satisfacen

$$\int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega} |f(x)|^p \, dx \leq c\, \rho^\lambda \qquad (1.1)$$

para todo $0 < \rho \leq \rho_0 = \text{diám}\,\Omega$, $x_0 \in \Omega$ y siendo $B(x_0,\rho) = \{x / |x-x_0| < \rho\}$.

Parece ser que las funciones con esta propiedad fueron utilizadas por primera vez por C. Morrey en el estudio de regularidad de soluciones de algunas ecuaciones lineales en derivadas parciales ([9]). Posteriormente, los espacios formados por estas funciones fueron estudiados con más detalle, principalmente por S. Campanato. Se los conoce ahora como "espacios de Morrey".

En este trabajo, se estudia una generalización natural de los espacios de Morrey. Consiste en reemplazar ρ^λ en (1.1) por $|B(x_0,\rho)|\,\varphi^p(\rho)$ donde $\varphi(t)$ es una función no creciente positiva, definida en $(0,\rho_0]$, con $\varphi(t) \longrightarrow \infty$ si $t \longrightarrow 0$, obteniéndose así los $M^p_\varphi(\Omega)$. Como es usual, $|\ |$ indica la medida de Lebesgue.

En 2. se dan definiciones equivalentes de los espacios de Morrey generalizados y se estudian las primeras propiedades: estructura de espacio de Banach, inclusiones de conjuntos y extensión de funciones de $M^p_\varphi(\Omega)$ a todo R^n. En particular, lo que se prueba es que (1.1) es equivalente a la estimación

$$\left[\frac{1}{|B(x_0,\rho)|}\int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega} |f(x)-c_B|^p \, dx\right]^{1/p} \leq c\,\varphi(\rho)$$

para cierta constante c_B en C.

Aparece así $M^p_\varphi(\Omega)$ como una adaptación del espacio BMO de las funciones de oscilación media acotada.

Se sabe a partir de [1] que en $M^p_\varphi(\Omega)$ no puede esperarse una acotación de la función de distribución. Esto hace esperar en algún sentido, un comportamiento patológico de las funciones de $M^p_\varphi(\Omega)$.En efecto, en 3. se demuestra con un contraejemplo la no existencia de un módulo de continuidad.

Por otra parte se estudia en 4. la acción de truncaciones y de identidades aproximadas.

En 5. se estudia la acción sobre $M^p_\varphi(\Omega)$ de la transformada de Riesz restringida a Ω , definida por S. Campanato en [3] , y se ven inclusiones del tipo de Sobolev.

En 6. se extiende, bajo ciertas condiciones , el resultado de N. Trudinger sobre la integrabilidad exponencial de las funciones de $L^{1,n-1}(\Omega)$, y además se muestra que la exponencial de funciones de $M^p_\varphi(\Omega)$ está en algún $M^q_\psi(\Omega')$.

En 7. se representa a los espacios de Morrey como duales de ciertos espacios definidos a partir de átomos.

Finalmente, en 8. se aplica lo anterior al estudio de operadores definidos a partir de funciones de M^p_φ.

2. Los espacios $M^p_\varphi(\Omega)$ y $\mathcal{M}^p_\varphi(\Omega)$. Definiciones equivalentes. Primeras propiedades.

Sea $\Omega \subset R^n$ abierto y acotado, δ_0=diámetro de Ω , $0<\lambda<n$, $1\leq p<\infty$. Se define el espacio de Morrey $L^{p,\lambda}(\Omega)$ como el conjunto de todas las funciones f(x) p-integrables en Ω para las cuales existe $A=A(f)>0$ tal que

$$\int_{B(x_0,\delta)\cap\Omega} |f(x)|^p dx \leq A\,\delta^\lambda \tag{2.1}$$

para todo $x_0\in\Omega$, $0<\delta\leq\delta_0$ y donde $B(x_0,\delta)=\left\{x\in R^n/|x-x_0|<\delta\right\}$.

Más generalmente, dado $k\geq 0$, se dice que $f(x)\in\mathcal{L}^{p,\lambda}_k(\Omega)$ si existe $A>0$ tal que para todo $x_0\in\Omega$, $\delta\leq\delta_0$ se tiene

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_k}\left\{\int_{B(x_0,\delta)\cap\Omega}|f(x)-P(x)|^p\,dx\right\}\leq A\,\delta^\lambda \tag{2.2}$$

donde $\mathcal{P}_k$ es la clase de polinomios de grado $\leq k$.

Se tiene una generalización natural de estos espacios cuando se reemplaza en (2.1) y (2.2), δ^λ por $|B(x_0,\delta)|\,\varphi^p(\delta)$, donde $\varphi(t)$ es una función real positiva definida en $(0,\delta_0]$ no creciente. De esta manera quedan definidos $M^p_\varphi(\Omega)$ y $\mathcal{M}^p_{\varphi,k}(\Omega)$.

Si bien R^n no es acotado, se pueden definir de la misma manera $M^p_\varphi(R^n)$ y $\mathcal{M}^p_{\varphi,k}(R^n)$ tomando en (2.1) y (2.2) $x_0\in R^n$ y $\delta>0$ cualquiera. En este caso los notaremos M^p_φ y $\mathcal{M}^p_{\varphi,k}$.

Si se define

$$\|f\|^*_{\mathcal{M}^p_{\varphi,k}(\Omega)}=\inf A^{1/p}$$

resulta ser una seminorma (Si f(x) es constante, $\|f\|^*_{\mathcal{M}^p_{\varphi,k}(\Omega)}=0$). Si Ω es acotado se puede obtener a partir de ella una norma

$$\|f\|^{**}_{\mathcal{M}^p_{\varphi,k}(\Omega)}=\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|f\|^*_{\mathcal{M}^p_{\varphi,k}(\Omega)}$$

que simplemente se notará $\|f\|$ cuando no se preste a confusiones. Con esta norma $\mathcal{M}^p_{\varphi,k}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Se observa inmediatamente que $L^{p,0}(\Omega)$ describe a $L^p(\Omega)$ y que $\mathcal{L}^{p,n}_0(\Omega)$ es una versión de $BMO(\Omega)$.

S. Campanato [2] ha probado que cuando $0<\lambda<n$, $L^{p,\lambda}(\Omega)$ y $\mathcal{L}^{p,\lambda}_k(\Omega)$ son equivalentes siempre que Ω cumpla

$$|\Omega \cap B(x_o,\rho)| \geqslant B\rho^n \text{ para un } B>0, \text{ para todo } x_o\in\Omega \text{ y } \rho\leq\rho_o \tag{2.3}$$

También en este caso vale la equivalencia:

<u>Proposición 2.1</u>: Sea Ω con la propiedad (2.3), $\varphi(t)$ tal que

i) Existe $0<D<1$ tal que $\varphi(2t) \leq D\,\varphi(t)$, $0<t\leqslant\rho_o$.

ii) $\varphi(t)$ es no creciente y $t^n\varphi^p(t)$ es no decreciente en $(0,\rho_o]$

Bajo estas condiciones $M^p_\varphi(\Omega)$ y $\mathcal{M}^p_{\varphi,k}(\Omega)$ están formados por las mismas funciones.

<u>Demostración</u>: Una de las inclusiones es trivial y se cumple sin imponerle condiciones a la función $\varphi(t)$, pues

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_k} \int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} |f(x)-P(x)|^p\,dx \leqslant \int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} |f(x)|^p\,dx$$

La demostración de la otra inclusión se basa en los dos lemas siguientes cuya demostración se encuentra en [2] .

<u>Lema 2.1</u>: Sean $P(x)\in\mathcal{P}_k$, $p\geqslant 1$, E un subconjunto de $B(x_o,\rho)$ que verifica

$$|E| \geqslant A\rho^n$$

Existe una constante $c(k,p,n,A)$ tal que para toda n-upla α

$$\left|\left[D^\alpha P(x)\right]_{x=x_o}\right|^p \leqslant \frac{c}{\rho^{n+|\alpha|p}} \int_E |P(x)|^p\,dx$$

<u>Lema 2.2</u>: **Para** todo $x_o\in\Omega$, $0<\rho\leq\rho_o$ existe un único polinomio que realiza el ínfimo en (2.2).

Se llamará $P_k(x,x_o,\rho)$ al polinomio asociado a $B(x_o,\rho)$ y se notará

$$a_\alpha(x_o,\rho) = \left[D^\alpha \ P_k(x,x_o,\rho)\right]_{x=x_o}$$

Se prueba ahora la otra inclusión, es decir $\mathcal{M}^p_{\varphi,k}(\Omega) \subset \mathcal{M}^p_\varphi(\Omega)$

Como

$$\int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} |f(x)|^p \, dx \leq 2^p \int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} |f(x)-P_k(x,x_o,\rho)|^p dx + 2^p \int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} |P_k(x,x_o,\rho)|^p dx$$

Sabiendo que $f(x) \in \mathcal{M}^p_{\varphi,k}(\Omega)$, sólo resta acotar el segundo término. Se tiene

$$\int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} |P_k(x,x_o,\rho)|^p dx \leq \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \frac{|a_\alpha(x_o,\rho)|^p}{p!} \int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} |x-x_o|^{|\alpha|p} \, dx \leq$$

$$\leq c \sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha(x_o,\rho)|^p \rho^{n+|\alpha|p} \qquad (2.4)$$

Lo que debe hacerse ahora es acotar cada uno de los términos de la sumatoria por $c\rho^n \varphi^p(\rho)$, con c no dependiendo de $B(x_o,\rho)$.Para ello se acotan las derivadas del polinomio asociado a x_o y ρ cualquiera sean $x_o \in \Omega$ y $0 < \rho \leq \rho_o$.

Sea i entero positivo tal que $\rho_o/2^{i+1} \leq \rho \leq \rho_o/2^i$.Entonces

$$|a_\alpha(x_o,\rho)| \leq |a_\alpha(x_o,\rho)-a_\alpha(x_o,\rho_o 2^{-i})| + |a_\alpha(x_o,\rho_o 2^{-i})-a_\alpha(x_o,\rho_o)| +$$

$$+ |a_\alpha(x_o,\rho_o)| = I + II + III \qquad (2.5)$$

Ahora se acotan I, II y III.(La constante c que aparece frecuentemente no tiene por qué ser siempre la misma)

Para I se aplica el lema 2.1:

$$I^p = |a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,\rho_0 2^{-i})|^p \leq c\rho^{-n-|\alpha|p}\int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega} |P_k(x,x_0,\rho)-P_k(x,x_0,\rho_0 2^{-i})|^p dx$$

$$\leq c\rho^{-n-|\alpha|p}\Big[2^p\int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega} |P_k(x,x_0,\rho)-f(x)|^p dx + 2^p\int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega} |P_k(x,x_0,\rho_0 2^{-i})-f(x)|^p dx\Big]$$

$$\leq c2^p\rho^{-n-|\alpha|p}\Big[\|f\|^p|B(x_0,\rho)|\varphi^p(\rho)+\int_{B(x_0,\rho_0 2^{-i})} |f(x)-P_k(x,x_0,\rho_0 2^{-i})|^p dx\Big] \leq$$

$$\leq c2^p\rho^{-n-|\alpha|p}\|f\|^p\Big[|B(x_0,\rho)|\varphi^p(\rho)+|B(x_0,\rho_0 2^{-i})|\varphi^p(\rho_0 2^{-i})\Big] \leq$$

$$\leq c\rho^{-n-|\alpha|p}\|f\|^p\Big[\rho^n\varphi^p(\rho)+(\rho_0 2^{-i})^n\varphi^p(\rho_0 2^{-i})\Big]$$

Usando las condiciones i) y ii) resulta

$$(\rho_0 2^{-i})^n\,\varphi^p(\rho_0 2^{-i}) \leq D^p 2^n(\rho_0 2^{-i-1})^n\,\varphi^p(\rho_0 2^{-i-1}) \leq$$

$$\leq c\,D^p\rho^n\varphi^p(\rho)$$

Por lo tanto

$$I \leq c\,\|f\|\,\rho^{-n/p-|\alpha|}\,|B(x_0,\rho)|^{1/p}\varphi(\rho) \qquad (2.6)$$

Se acota ahora II

$$II = |a_\alpha(x_0,\rho_0)-a_\alpha(x_0,\rho_0 2^{-i})| \leq \sum_{h=0}^{i-1} |a_\alpha(x_0,\rho_0 2^{-h})-a_\alpha(x_0,\rho_0 2^{-h-1})|$$

Aplicando el lema 2.1 a cada uno de los términos

$$II \leq \sum_{h=0}^{i-1} (\rho_0 2^{-h-1})^{\frac{-n-|\alpha|p}{p}}\Big[\int_{B(x_0,\rho_0 2^{-h-1})\cap\Omega} |P_k(x,x_0,\rho_0 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho_0 2^{-h-1})|^p dx\Big]^{1/p}$$

Intercalando f(x) en cada uno de los integrandos resulta

$$\leq c \sum_{h=0}^{i-1} (\varrho_0 2^{-h-1})^{-n/p-|\alpha|} \|f\| \, |B(x_0,\varrho_0 2^{-h})|^{1/p} \varphi(\varrho_0 2^{-h})$$

Usando i) se tiene

$$II \leq c \|f\| \varphi(\varrho_0 2^{-i-1}) \sum_{h=0}^{i-1} D^{i-h} (\varrho_0 2^{-h-1})^{-|\alpha|} \leq$$

$$\leq c \|f\| \varrho^{-|\alpha|} \varphi(\varrho_0 2^{-i-1}) \sum_{h=0}^{i-1} D^{i-h}$$

Como $D<1$ la sumatoria está acotada independientemente de i, quedando

$$II \leq c \|f\| \varrho^{-n/p-|\alpha|} (\varrho_0 2^{-i-1})^{n/p} \varphi(\varrho_0 2^{-i-1})$$

Al ser $t^n \varphi^p(t)$ no decreciente resulta

$$II \leq c \|f\| \varrho^{-n/p-|\alpha|} |B(x_0,\varrho)|^{1/p} \varphi(\varrho) \tag{2.7}$$

Finalmente, para el tercer término se tiene

$$III^p = |a_\alpha(x_0,\varrho_0)|^p \leq c \varrho_0^{-n-|\alpha| p} \int_{B(x_0,\varrho_0)\cap\Omega} |P_k(x,x_0,\varrho_0)|^p \, dx \leq$$

$$\leq c \varrho_0^{-n-|\alpha|p} \left[\int_{B(x_0,\varrho_0)} |P_k(x,x_0,\varrho_0)-f(x)|^p dx + \int_\Omega |f(x)|^p dx \right] \leq$$

$$\leq c \varrho_0^{-n-|\alpha|p} \left[\|f\|^p |B(x_0,\varrho_0)| \varphi^p(\varrho_0) + \|f\|^p_{L^p(\Omega)} \right] \leq$$

$$\leq c \varrho_0^{-n-|\alpha|p} \left[\|f\|^p |B(x_0,\varrho_0)| \varphi^p(\varrho_0) \left(1 + \frac{1}{|B(x_0,\varrho_0)| \varphi^p(\varrho_0)}\right) \right] \leq$$

$$\leq c\, \rho_o^{-|\alpha|p} \|f\|^p D^{p(i+1)} \varphi^p(\rho_o 2^{-i-1}) \leq c\, \rho^{-|\alpha|p} \varphi^p(\rho_o 2^{-i-1}) \leq$$

$$\leq c\, \rho^{-n-|\alpha|p} |B(x_o, \rho_o 2^{-i-1})| \varphi^p(\rho_o 2^{-i-1}) \|f\|^p$$

Usando la propiedad ii) se tiene

$$III^p \leq \bar{c}\, \rho^{-n-|\alpha|p} |B(x_o,\rho)| \varphi^p(\rho) \|f\|^p \tag{2.8}$$

De (2.6),(2.7) y (2.8) se obtiene en (2.5):

$$|a_\alpha(x_o,\rho)|^p \leq c\, \rho^{-n-|\alpha|p} \|f\|^p |B(x_o,\rho)| \varphi^p(\rho)$$

Usando esto en (2.4) queda

$$\int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} |P_k(x,x_o,\rho)|^p dx \leq c \sum_{|\alpha|\leq k} \|f\|^p |B(x_o,\rho)| \varphi^p(\rho)$$

Y finalmente se concluye

$$\int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} |f(x)|^p dx \leq c\|f\|^p |B(x_o,\rho)| \varphi^p(\rho)$$

con lo cual $f(x) \in M^p_\varphi(\Omega)$. Con esto queda probada la proposición 2.1.

Observación 2.1: La proposición 2.1 es una generalización del resultado que Campanato muestra en [2] . En efecto, $L^{p,\lambda}(\Omega)$, $0<\lambda<n$, se corresponde con $M^p_\varphi(\Omega)$ siendo $\varphi(t)= t^{(\lambda-n)/p}$. Esta función $\varphi(t)$ cumple i) con $D= 2^{(\lambda-n)/p}$ así como también la condición ii) pues $\lambda > 0$.

<u>Observación 2.2</u>: Cuando $\varphi(t)$ es constante (y por lo tanto no cumple i)) es $\mathcal{M}^p_{\varphi,0}(\Omega) = BMO(\Omega)$. En este caso no es cierto el resultado anterior, es decir, no es indistinto definir $BMO(\Omega)$ con participación de constantes en el integrando o sin ellas, pues en tal caso resultaría incluído en $L^\infty(\Omega)$.

Los espacios $M^p_\varphi(\Omega)$ cumplen la siguiente relación de inclusión:

$$M^p_\varphi(\Omega) \subset M^q_\psi(\Omega) \quad \text{siempre que } 1 \leq q \leq p \text{ y } \varphi^q(t) \leq A\psi^q(t).$$

Esto se ve sencillamente: Sea $f(x) \in M^p_\varphi(\Omega)$

$$\int_{B(x_0,\delta)\cap\Omega} |f(x)|^q\,dx \leq \left[\int_{B(x_0,\delta)\cap\Omega} |f(x)|^p\,dx\right]^{q/p}\left[\int_{B(x_0,\delta)\cap\Omega} dx\right]^{(p-q)/p} \leq$$

$$\leq \left[\|f\|^p_{M^p_\varphi(\Omega)} |B(x_0,\delta)|\,\varphi^p(\delta)\right]^{q/p}\left[|B(x_0,\delta)|\right]^{(p-q)/p} \leq$$

$$\leq \|f\|^q_{M^p_\varphi(\Omega)} |B(x_0,\delta)|\,\varphi^q(\delta) \leq A\|f\|^q_{M^p_\varphi(\Omega)} |B(x_0,\delta)|\,\psi^q(\delta)$$

Por lo tanto $f(x) \in M^q_\psi(\Omega)$ y además

$$\|f\|_{M^q_\psi(\Omega)} \leq A^{1/q}\|f\|_{M^p_\varphi(\Omega)}$$

Si en el integrando se agregan polinomios se obtienen las mismas relaciones de inclusión para los $\mathcal{M}^p_{\varphi,k}(\Omega)$.

Las funciones de $M^p_\varphi(\Omega)$ pueden ser extendidas trivialmente a todo R^n, cualquiera sea $\Omega \subset R^n$ acotado. En efecto, se tiene:

Proposición 2.2: Sea $\Omega \subset R^n$ acotado, $\varphi(t)$ tal que $t^n \varphi^p(t)$ es no decreciente en $(0,\infty)$. Entonces, dada $f(x) \in M^p_\varphi(\Omega)$, su extensión $f^*(x)$ definida como cero fuera de Ω, pertenece a M^p_φ.

Demostración: Si, como siempre, $\rho_0 = \text{diám}\,\Omega$, se consideran varios casos:

i) Si $x_0 \in \Omega$ y $\rho \leq \rho_0$, por pertenecer $f(x)$ a $M^p_\varphi(\Omega)$, se tiene

$$\int_{B(x_0,\rho)} |f^*(x)|^p \, dx = \int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega} |f(x)|^p \, dx \leq \|f\|^p |B(x_0,\rho)| \, \varphi^p(\rho)$$

ii) Si $x_0 \in \Omega$ y $\rho > \rho_0$

$$\int_{B(x_0,\rho)} |f^*(x)|^p dx = \int_{B(x_0,\rho_0)\cap\Omega} |f(x)|^p dx \leq \|f\|^p |B(x_0,\rho_0)| \varphi^p(\rho_0) \leq$$

$$\leq \|f\|^p |B(x_0,\rho)| \varphi^p(\rho)$$

iii) Si $x_0 \notin \Omega$ y $B(x_0,\rho)\cap\Omega \neq \emptyset$, existe $x_1 \in B(x_0,\rho)\cap\Omega$.
Si $\rho \leq \rho_0$, se tiene

$$\int_{B(x_0,\rho)} |f^*(x)|^p dx \leq \int_{B(x_1,\rho)\cap\Omega} |f(x)|^p dx \leq \|f\|^p |B(x_0,\rho)| \, \varphi^p(\rho)$$

Y si $\rho > \rho_0$

$$\int_{B(x_0,\rho)} |f^*(x)|^p dx \leq \int_{B(x_1,\rho_0)\cap\Omega} |f(x)|^p dx \leq \|f\|^p |B(x_1,\rho_0)| \varphi^p(\rho_0) \leq$$

$$\leq \|f\|^p |B(x_0,\rho)| \varphi^p(\rho)$$

iv) Si $x_0 \notin \Omega$ y $B(x_0,\rho)\cap\Omega = \emptyset$, no hay nada que probar.

Observación 2.3: La proposición 2.2 sigue siendo válida si se toma $\mathcal{M}^{p}_{\varphi,k}(\Omega)$ en lugar de $M^{p}_{\varphi}(\Omega)$. También incluye el caso $\mathcal{L}^{p,\lambda}_{k}(\Omega)$ para $\lambda \geqslant 0$. La definición de $BMO(\Omega)$ como $\mathcal{L}^{p,n}_{0}(\Omega)$ es más restringida que la que aparece en [6]. En efecto, John y Nirenberg caracterizan $BMO(\Omega)$ como aquellas funciones localmente integrables tal que para todo $B(x_0,\delta)\subset\Omega$ existe $A>0$ no dependiente de x_0 y δ que satisfacen

$$\inf_{c\in C}\left\{\frac{1}{|B(x_0,\delta)|}\int_{B(x_0,\delta)}|f(x)-c|^{p}\,dx\right\}\leqslant A$$

Para esta definición, el resultado anterior no es cierto. Basta observar que logt pertenece a $BMO(R^{+})$ pero su extensión como cero en $t\leqslant 0$ no pertenece a BMO.

3. Módulo de continuidad de las funciones de $M^{p}_{\varphi}(\Omega)$.

S. Campanato [2] mostró que cuando $n<\lambda<n+p$ las funciones de $\mathcal{L}^{p,\lambda}_{0}(\Omega)$ tienen un módulo de continuidad, es decir, cumplen p.p en Ω :

$$|f(x)-f(y)|\leq c(p,\lambda,n)\,\|f\|\,|x-y|^{(\lambda-n)/p}$$

Este resultado se puede generalizar para los espacios $\mathcal{M}^{p}_{\varphi,0}(\Omega)$ siempre que $\varphi(t)$ sea una función no decreciente, $\varphi(0)=0$ y $\varphi(t/2)\leqslant B\varphi(t)$ para un $0<B<1$. En tal caso se tiene que para casi todo par x,y en Ω

$$|f(x)-f(y)|\leq c\,\|f\|\,\varphi(|x-y|)\xrightarrow[|x-y|\to 0]{} 0$$

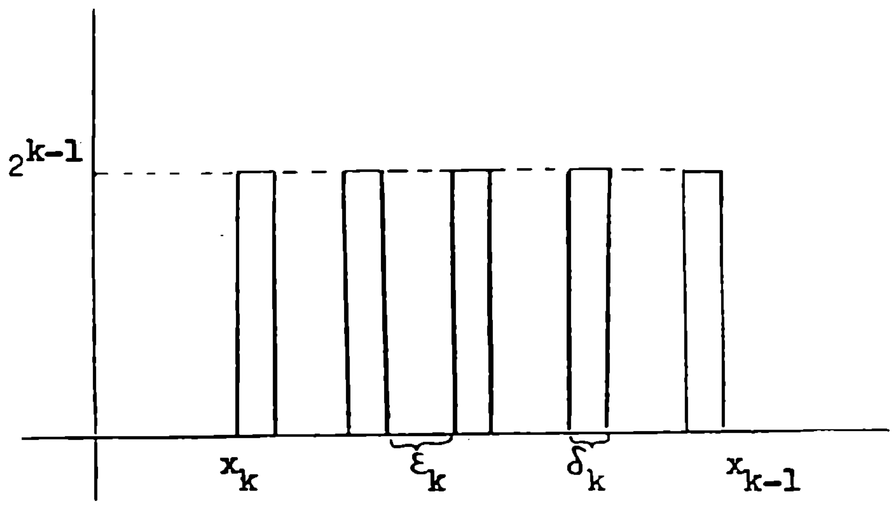
No ocurre lo mismo cuando se trabaja con una función $\varphi(t)$ que tiende a ∞ en el origen, pues es posible construir una función

$f(x)$ perteneciente a M^p_φ tal que para cualquier constante $c>0$, existen intervalos B_c de medida arbitrariamente chica en los cuales

$$|f(x) - f(y)| \geq c$$

La función $f(x)$ es escalonada y está basada en la que aparece en [1] . Pero dado que esta misma función será usada más adelante, es conveniente detallar su construcción. En un primer paso se construye $f(x)$ en R, y a partir de allí se obtiene una en R^n:

Sea a tal que $\varphi(t)$ es no creciente en $(0,a]$, $t\,\varphi^p(t)$ es no decreciente en $(0,a]$ y $\varphi(a)=1$. Dentro de ese intervalo se toma una sucesión (x_k) decreciente hacia el origen tal que $x_{k-1} - x_k = a/2^{pk}$ dando origen a los intervalos $J_k=(x_k-x_{k-1})$. Cada intervalo J_k se subdivide en $2n_k-1$ partes. De ellas n_k son de longitud $\delta_k=a/n_k 2^{2pk}$ y n_k-1 de longitud $\varepsilon_k=(|J_k|-a/2^{2pk})/(n_k-1)$ Se define $f(x)=2^{k-1}$ en los intervalos de longitud δ_k y cero en otro caso.



Esta función claramente cumple con la desigualdad buscada. Falta determinar el valor de n_k para que además pertenezca a $M^p_\varphi(0,x_1)$. Debe verse que para todo intervalo $J\subset(0,x_1)$ se tiene

$$\int_J |f(x)|^p\, dx \leq c\,|J|\,\varphi^p(|J|)$$

Supongamos que $J \subset J_k$ para algún k, y que además abarca j intervalos de longitud δ_k y j-1 intervalos de longitud ε_k. En este caso debe obtenerse

$$j\,\delta_k\, 2^{p(k-1)} \leqslant |J|\,\varphi^p(|J|) = (j\delta_k + (j-1)\,\varepsilon_k)\varphi^p(j\,\delta_k + (j-1)\,\varepsilon_k)$$

reemplazando δ_k y ε_k por su valor

$$j\frac{a2^{-2pk}}{n_k}\, 2^{p(k-1)} \leqslant (j\,\frac{a2^{-2pk}}{n_k} + (j-1)(\frac{|J_k|-a2^{-2pk}}{n_k-1})\,\varphi^p(j\frac{a2^{-2pk}}{n_k} + (j-1)(\frac{|J_k|-a2^{-2pk}}{n_k-1}))$$

Simplificando, queda

$$2^{p(k-1)} \leqslant (1 + \frac{n_k}{j}\,\frac{j-1}{n_k-1}\,(2^{pk}-1))\,\varphi^p(a2^{-2pk}(\frac{j}{n_k} + \frac{(j-1)(2^{pk}-1)}{n_k-1})) \tag{3.1}$$

Como $(j-1)/(n_k-1) \leqslant j/n_k$ se tiene

$$\varphi\,(a2^{-2pk}(\frac{j}{n_k} + \frac{j-1}{n_k-1}(2^{pk}-1))) \geqslant \varphi(a\,\frac{j}{n_k}) \geqslant \varphi(a) = 1$$

Basta entonces encontrar n_k tal que

$$2^{p(k-1)} \leqslant (1 + \frac{n_k}{j}\,\frac{j-1}{n_k-1}\,(2^{pk}-1))\,\varphi^p(a\,\frac{j}{n_k})$$

Como $\varphi(t) \longrightarrow \infty$ cuando $t \longrightarrow 0$, es posible hallar un $0 < r < a$ dependiendo de k tal que para todo $0 < t \leqslant r$ se tiene $\varphi^p(t) \geqslant 2^{p(k-1)}$. Si $aj/n_k \leqslant r$ se tiene la desigualdad deseada. En el caso contrario, es decir $aj/n_k > r$, debe encontrarse n_k tal que

$$2^{p(k-1)} \leq 1 + \frac{n_k}{j} \frac{j-1}{n_k-1} (2^{pk}-1)$$

Como $(j-1)/j$ crece con j basta con probar

$$2^{p(k-1)} \leq 1 + \frac{a}{r} \frac{n_k r/a - 1}{n_k - 1} (2^{pk}-1)$$

Tomando $n_k \geqslant \dfrac{a/r-(2^{p(k-1)}-1)/(2^{pk}-1)}{1-(2^{p(k-1)}-1)/(2^{pk}-1)}$ se obtiene lo deseado.

Se supone ahora que J está contenido en algún intervalo de longitud δ_k. Debe verse que

$$|J|\, 2^{p(k-1)} \leq |J|\, \varphi^p(|J|)$$

o bien, como $\varphi(t)$ es decreciente

$$2^{k-1} \leq \varphi(\delta_k)$$

Pero esta es la desigualdad (3,1) para $j=1$.

Si $J \subset J_k$ es cualquiera, se puede descomponer como

$$J = J_1 \cup J_2 \cup J_3$$

donde J_1 y J_2 son respectivamente, del primero y segundo tipo ya considerados y J_3 es parte de algún intervalo de longitud ε_k. Se tiene

$$\int_J |f(x)|^p dx = \int_{J_1} |f(x)|^p dx + \int_{J_2} |f(x)|^p dx \leq$$

$$\leq |J_1 \cup J_2|\, \varphi^p(|J_1 \cup J_2|)$$

Pero como $t\varphi^p(t)$ es no decreciente se tiene la acotación deseada.

Ahora sólo falta obtener la estimación para $J=(0,x_s)$. En este caso

$$\int_J |f(x)|^p dx = \sum_{k=s}^{\infty} 2^{p(k-1)} a 2^{-2pk} \leq a|J| \leq a|J|\varphi^p(|J|)$$

Con esto queda demostrado que $f(x) \in M^p_\varphi(0,x_1)$. Extendiendo esta función como cero fuera de $(0,x_1)$ se obtiene la función buscada en M^p_φ. Para $n>1$ se parte del cubo n-dimensional

$$Q=(0,x_1)x(0,x_1)x.........x(0,x_1)$$

Se define $F(x_0,......,x_{n-1})=f(x_0)$ que claramente cumple lo deseado.

4. Acción de identidades aproximadas. Densidad.

Las funciones truncadas de $f(x) \in M^p_\varphi$ en general no convergen a $f(x)$ en la norma de M^p_φ. Un ejemplo sencillo en R está dado por la función $f(x)=\frac{1}{|x|^\lambda}$ que pertenece a $L^{1,1-\lambda}$ con $0<\lambda<1$. Si χ_j es la función característica de $B(0,j)$ entonces $f(x)\chi_j(x)$ no converge a $f(x)$ en la norma de $L^{1,1-\lambda}$. Para verlo, basta encontrar $c>0$ tal que para todo j, existen $\rho>0$ y a que cumplen

$$\int_a^{a+\rho} |f(x)\chi_j(x) - f(x)|\, dx \geq c\,\rho^{1-\lambda}$$

Dado j, se toma $a=\rho=j$; entonces

$$\int_j^{2j} |f(x)\chi_j(x) - f(x)|\, dx = \int_j^{2j} \frac{dx}{x^\lambda} = (1-\lambda)\, x^{1-\lambda}\Big|_j^{2j} =$$

$$=(1-\lambda)(2^{1-\lambda}-1)\, j^{1-\lambda} = c\, j^{1-\lambda} = c\,\rho^{1-\lambda}$$

Las identidades aproximadas de una función de M^p_φ tampoco convergen a ella:

Si $\theta(x)$ es una función de $C_0^\infty(R^n)$ soportada en $B(0,1)$ que toma valores entre 0 y 1 y además $\int \theta(x)\,dx = 1$, se define $\theta_j(x) = j^n\theta(jx)$. No es cierto en general que $f * \theta_j(x) \longrightarrow f(x)$ en M^p_φ cuando $j \longrightarrow \infty$. Se prueba esto con la función $f(x)$ construída en 3. con $\varphi(t) = t^{(\lambda-n)/p}$ y tomando intervalos J_k de longitud $2^{-pk\lambda/(1-\lambda)}$. Estos intervalos se dividen en $2n_k-1$ intervalos de longitud δ_k y ε_k alternadamente con $\delta_k = \dfrac{2^{-pk}\, 2^{-pk\lambda/(1-\lambda)}}{n_k}$ (En este caso a=1). El valor de n_k está dado por

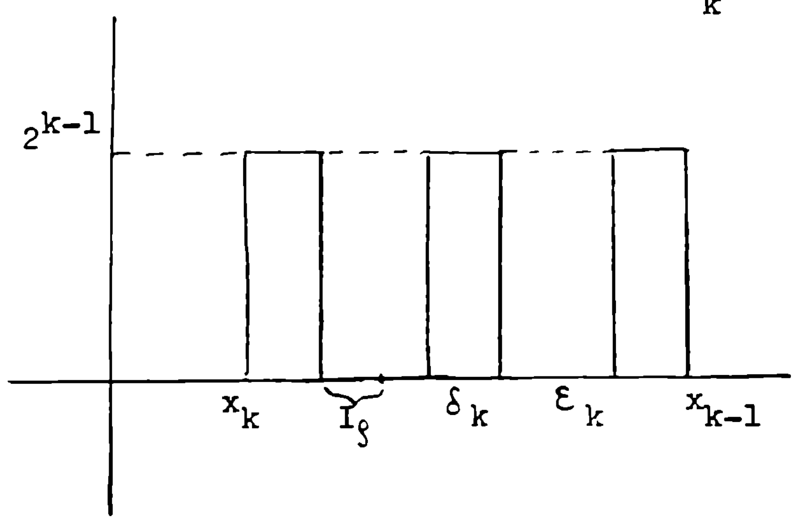
$$n_k = \frac{1/r - (2^{p(k-1)} - 1)/(2^{pk}-1)}{1 - (2^{p(k-1)} - 1)/(2^{pk}-1)}$$

La función $f(x)$ vale 2^{k-1} en los intervalos de longitud δ_k y cero en otro caso.

Dado $j_0 \in N$, debe hallarse $j \geqslant j_0$ y un intervalo I_δ de longitud δ tal que

$$\int_{I_\delta} \left| \int_{|y|\leqslant 1/j} (f(x-y) - f(x))\, \theta_j(y)\, dy \right|^p dx \geqslant c\, \delta^\lambda$$

Se elige I_δ contenido en un intervalo de longitud ε_k, con el extremo izquierdo común a un intervalo I_{δ_k} de longitud δ_k.



Fijado $j \geqslant j_o$ suficientemente grande, se elige k de tal manera que para todo $x \in I_\varrho$, $y \geqslant 1/2j$ resulta $x-y \in I_{\delta_k}$. En estas condiciones

$$\int_{I_\varrho} \left| \int_{|y| \leq 1/j} (f(x-y)-f(x))\, \theta_j(y)\, dy \right|^p dx \geqslant \left[\int_{1/2j \leq y \leq 1/j} \theta_j(y)\, dy \right]^p 2^{p(k-1)} \varrho =$$

$$= \left[\int_{1/2 \leq y \leq 1} \theta(y)\, dy \right]^p 2^{p(k-1)} \varrho$$

Entonces debe cumplirse $2^{p(k-1)} \varrho \geqslant c\, \varrho^\lambda$. Para ello debe ser $\varrho \geqslant (c2^{-p(k-1)})^{1/(1-\lambda)}$. Además se busca $\varrho \leq \delta_k \leq \varepsilon_k$, y esto puede ocurrir si $\delta_k \geqslant c(2^{-p(k-1)})^{1/(1-\lambda)}$. Pero

$$\delta_k = \frac{2^{-pk}\, 2^{-pk\lambda/(1-\lambda)}}{n_k} = 2^{-pk}\, 2^{-pk\lambda/(1-\lambda)} \frac{1-(2^{p(k-1)}-1)/(2^{pk}-1)}{1/r-(2^{p(k-1)}-1)/(2^{pk}-1)} =$$

$$= 2^{-pk}\, 2^{-pk\lambda/(1-\lambda)} \frac{2^{pk}-2^{p(k-1)}}{(2^{pk}-1)/r-2^{p(k-1)}+1} = 2^{-pk\lambda/(1-\lambda)} \frac{(1-2^{-p})}{2^{p(k-1)}(2^p/r-1)+1-1/r}$$

Entonces basta ver que es posible encontrar $c > 0$ tal que

$$2^{p(k-1)}(2^p/r-1) + 1 - 1/r \leqslant c\; 2^{p(k-1)}$$

Y esto siempre es posible.

Tampoco es cierto en general que las funciones de $M^p_\varphi(\Omega)$ puedan aproximarse por funciones indefinidamente derivables, y más aún, ni siquiera por funciones continuas. Esto se puede ver con un ejemplo simple en $L^{p\lambda}(\Omega)$, $0 < \lambda < n$. En efecto, dado $x_o \in \Omega$

y $\rho_1 \leq \rho_o$ tal que $B(x_o,\rho_1) \subset \Omega$,si se define para $x \in \Omega$

$$f_{x_o}(x) = |x-x_o|^{(\lambda-n)/p}$$

resulta

$$\| f-h \| \geq 2^{-p-1} |S^{n-1}|$$

cualquiera sea la función h(x) continua en Ω, y siendo $S^{n-1} = \{ x \in R^n \ / \ |x|=1 \}$.

Para que se cumpla la afirmación basta hallar $0 < \rho \leq \rho_1$ tal que

$$\int_{B(x_o,\rho)} |f_{x_o}(x)-h(x)|^p \, dx \geq 2^{-p-1} |S^{n-1}| \, \rho^{\lambda}$$

Sea $M = \sup_{x \in B(x_o,\rho_1)} |h(x)|^p$. Entonces

$$\int_{B(x_o,\rho)} |f_{x_o}(x)-h(x)|^p dx \geq 2^{-p} \int_{B(x_o,\rho)} |f_{x_o}(x)|^p dx - \int_{B(x_o,\rho)} |h(x)|^p dx \geq$$

$$\geq 2^{-p} \int_{B(x_o,\rho)} |x-x_o|^{-n+\lambda} dx - M|S^{n-1}| \rho^n = 2^{-p}|S^{n-1}| \rho^{\lambda} - M|S^{n-1}| \rho^n =$$

$$= |S^{n-1}| \rho^{\lambda} (2^{-p} - M \rho^{n-\lambda})$$

Por lo tanto basta hallar $0 < \rho \leq \rho_1$ tal que $2^{-p} - M \rho^{n-\lambda} \geq 2^{-p-1}$ y esto siempre es posible.Queda así probada la afirmación.

La situación cambia si se considera el subconjunto de M^p_{φ} :

$$\overline{M}^p_{\varphi} = \{ f \in M^p_{\varphi} \text{ tal que } \| f(x-y) - f(x) \| \longrightarrow 0 \text{ si } y \longrightarrow 0 \}$$

<u>Proposición 4.1</u>: Sea $\varphi(t)$ no creciente tal que $t^n \varphi^p(t)$ es no decreciente. Entonces:

i) Si $f(x) \in \overline{M}^p_\varphi$, entonces $f * \theta_j(x) \longrightarrow f(x)$ en la norma de M^p_φ cuando $j \to \infty$.

ii) Si $f(x) \in M^p_\varphi$ es aproximable por funciones derivables de soporte compacto, entonces $f(x) \in \overline{M}^p_\varphi$.

<u>Demostración</u>: i) Dado $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$

$$\left[\int_{B(x_0,\rho)} \left| f * \theta_j(x) - f(x)\right|^p dx\right]^{1/p} \leq \int_{|y|\leq 1/j} \theta_j(y)\,dy \left[\int_{B(x_0,\rho)} |f(x-y)-f(x)|^p dx\right]^{1/p} \leq$$

$\leq \varepsilon \|f\| \rho^{n/p}\varphi(\rho)$ si j es suficientemente grande

ii) Sean $\rho > 0$, $x_0 \in R^n$, $\varepsilon > 0$. Existe $g(x)$ derivable con soporte compacto tal que $\|f-g\| \leq \varepsilon/3$. Entonces

$$\left[\int_{B(x_0,\rho)} |f(x-y)-f(x)|^p dx\right]^{1/p} \leq \left[\int_{B(x_0,\rho)} |f(x-y)-g(x-y)|^p dx\right]^{1/p} +$$

$$+\left[\int_{B(x_0,\rho)} |g(x)-f(x)|^p dx\right]^{1/p} + \left[\int_{B(x_0,\rho)} |g(x-y)-g(x)|^p dx\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq c2\,\varepsilon/3\, \rho^{n/p}\varphi(\rho) + \left[\int_{B(x_0,\rho)} |g(x-y)-g(x)|^p dx\right]^{1/p} \tag{4.1}$$

Sea $d > 1$ tal que $\mathrm{sop}(g) \subset B(0,d-1)$. Si se toma $|y| < 1$, entonces (4.1) puede acotarse por

$$c2\,\varepsilon/3\, \rho^{n/p}\varphi(\rho) + |y|\,\|\nabla g\|_\infty |B(0,d)|^{1/p} \leq$$

$$\leq c2\,\varepsilon/3\, \rho^{n/p}\varphi(\rho) + \frac{|y|\,c}{\varphi(d)} \|\nabla g\|_\infty d^{n/p}\varphi(d)$$

Cuando $\rho \geq d$, como $t^n \varphi^p(t)$ es no decreciente, tomando $|y| \leq \frac{\varphi(d)}{\|\nabla g\|_\infty c} \varepsilon/3$ (4.1) queda acotado por $c\, \varepsilon\, \rho^{n/p} \varphi(\rho)$.

Si $\rho < d$, (4.1) se acota por

$$c2\, \varepsilon/3\, \rho^{n/p} \varphi(\rho) \quad + c|y|\, \|\nabla g\|_\infty \rho^{n/p}$$

Como $\varphi(t)$ es no creciente queda

$$\leq c2\, \varepsilon/3\, \rho^{n/p} \varphi(\rho) + \frac{c|y|}{\varphi(d)} \|\nabla g\|_\infty c\, \rho^{n/p} \varphi(\rho)$$

Si se toma y como antes se obtiene lo buscado.

Observación 4.1: La proposición 4.1 sigue valiendo si se reemplaza R^n por cualquier conjunto $\Omega \subset R^n$ abierto y acotado.

5. La transformada de Riesz restringida. Inclusiones del tipo de Sobolev.

Pueden extenderse a los $M^p_\varphi(\Omega)$ inclusiones del tipo de Sobolev. Para ello es conveniente estudiar una transformada semejante a la de Riesz:

Dada una $f(x) \in M^p_\varphi(\Omega)$ se define para $0 < \alpha < n$

$$U^f_\alpha(x) = \int_\Omega \frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

Proposición 5.1: Sean $\Omega \subset R^n$ acotado y $f(x) \in M^1_\varphi(\Omega)$. Entonces

i) Si $\varphi(t)$ y $t^\alpha \varphi(t)$ son no crecientes y además $t^n \varphi(t)$ es no decreciente, $U_\alpha^f(x)$ pertenece a $M^1_{t^\alpha\varphi}(\Omega)$.

ii) Si φ es no creciente y existe $\varepsilon > 0$ tal que $t^{\alpha-\varepsilon}\varphi(t)$ es no decreciente, $U_\alpha^f(x)$ está acotada en Ω.

<u>Demostración</u>: i) Sea $x_0 \in \Omega$, $\rho \leq \rho_0/2$. Si se toma $x \in B(x_0,\rho) \cap \Omega$ se tiene

$$|U_\alpha^f(x)| \leq \int_{\Omega\setminus B(x_0,2\rho)} \frac{|f(y)|dy}{|x-y|^{n-\alpha}} + \int_{B(x_0,2\rho)\cap\Omega} \frac{|f(y)|dy}{|x-y|^{n-\alpha}} = I + II$$

Se define para $0 \leq r \leq \rho_0$

$$v_x(r) = \int_{[\Omega\setminus B(x_0,2\rho)]\cap B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

Cuando $x \in B(x_0,\rho)$, $v_x(r)$ se anula para $0 \leq r \leq \rho$, y puede acotarse por $c\|f\|\, r^n \varphi(r)$ cuando $\rho \leq r \leq \rho_0$. Entonces, se tiene

$$I = \int_{\Omega\setminus B(x_0,2\rho)} \frac{|f(y)|\,dy}{|x-y|^{n-\alpha}} = \int_\rho^{\rho_0} r^{\alpha-n} v_x'(r)\, dr = r^{\alpha-n}\, v_x(r)\Big|_\rho^{\rho_0} -$$

$$-(\alpha-n)\int_\rho^{\rho_0} v_x(r)\, r^{\alpha-n-1}\, dr$$

Como $v_x(r)$ es no decreciente y $t^\alpha\varphi(t)$ no creciente, se obtiene:

$$I \leq \rho_0^{\alpha-n}\, v_x(\rho_0) - \rho^{\alpha-n}\, v_x(\rho) - v_x(\rho)\Big[(\rho_0^{\alpha-n} - \rho^{\alpha-n})\Big] =$$

$$= \rho_0^{\alpha-n}\, v_x(\rho_0) - v_x(\rho)\, \rho_0^{\alpha-n} \leq \rho_0^{\alpha-n}\, v_x(\rho_0) \leq c\,\|f\|\, \rho^\alpha\varphi(\rho)$$

Entonces

$$\int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} I \, dx \leq c \, \|f\| \, |B(x_o,\rho)| \, \rho^{\alpha} \varphi(\rho) \qquad (5.1)$$

Por otro lado

$$\int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega} II \, dx \leq \int_{B(x_o,2\rho)} |f(y)| \, dy \int_{B(x_o,\rho)\cap\Omega} \frac{dx}{|x-y|^{n-\alpha}} \leq$$

$$\leq c \, \|f\| \, \rho^{n} \rho^{\alpha} \varphi(\rho) \qquad (5.2)$$

De (5.1) y (5.2) se obtiene i).

ii)Sea $x \in \Omega$. Llamando

$$m_x(r) = \int_{B(x,r)\cap\Omega} |f(y)| \, dy$$

se tiene

$$|U_{\alpha}^{f}(x)| \leq \int_0^{\rho_o} r^{\alpha-n} m_x'(r) \, dr = r^{\alpha-n} m_x(r) \Big|_0^{\rho_o} - \int_0^{\rho_o} (\alpha-n) \, m_x(r) \, r^{\alpha-n-1} dr$$

Como $t^{\alpha-\varepsilon}\varphi(t)$ es no decreciente, existe el $\lim\limits_{s\to 0} s^{\alpha-n} m_x(s)$ y también la integral del segundo miembro. En consecuencia

$$|U_{\alpha}^{f}(x)| \leq c \, \|f\| \, \rho_o^{\alpha-\varepsilon} \varphi(\rho_o)$$

Con esto queda demostrada la proposición (5.1).

Se ven ahora las propiedades de inclusión mencionadas. En este caso Ω no es un conjunto abierto y acotado cualquiera. Ω posee la propiedad del cono, es decir, para cada punto $x \in \Omega$ existe un cono circular de vértice en x y contenido en Ω, siendo la altura y apertura independientes de x.

<u>Proposición 5.2</u>: Sea $\Omega \subset R^n$ acotado con la propiedad del cono y sea $f(x) \in M^p_\varphi(\Omega)$ tal que $\partial/\partial x_j\, f(x)$, $(1 \leq j \leq n)$, también pertenecen a $M^p_\varphi(\Omega)$. Entonces:

i) Si $\varphi(t)$ y $t^p \varphi^p(t)$ no crecen y $t^{\gamma-\varepsilon}\varphi^p(t)$ no decrece para algún $\gamma > p, \varepsilon > 0$, entonces f(x) pertenece a $M^{\beta}_{t^{\alpha/\beta}\varphi^{p/\beta}}(\Omega)$, donde

$$\beta < \beta^* = p\gamma/(\gamma - p)$$

$$\alpha < \alpha_0 = n - \beta n/p + (n-\gamma)(\beta-p)/p + \beta = \beta(1-\gamma/p) + \gamma$$

ii) Si $\varphi(t)$ es no creciente y existe $\varepsilon > 0$ tal que $t^{p-\varepsilon}\varphi^p(t)$ no decrece, entonces f(x) está acotada en Ω.

Para la demostración se necesita el siguiente lema que se encuentra en [9] :

<u>Lema 5.1</u>: Si Ω tiene la propiedad del cono y f(x) pertenece al espacio de Sobolev $W^1_1(\Omega)$, entonces

$$|f(x)| \leq c(k_\Omega) \int_\Omega \frac{F(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}$$

donde $F(y) = |f(y)| + \sum_{j=1}^{n} |\partial f/\partial y_j|$ y k_Ω es el cono asociado a Ω.

<u>Demostración de la proposición 5.2</u> : i) Se supone $p \leq \beta$. Sea $0 < \alpha < \alpha_o$. Usando el lema (5.1) y la desigualdad de Hölder, se estima

$$|f(x)| \leq c(n,\Omega) \int_{\Omega} \frac{F(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}} = c(n,\Omega) \int_{\Omega} \frac{F(y)^{p/\beta}}{|x-y|^{(n-\alpha)/\beta}} \cdot$$

$$\cdot \frac{F(y)^{1-p/\beta}}{|x-y|^{(n-\gamma)(\beta-p)/\beta p}} \cdot \frac{dy}{|x-y|^{n-1-(n-\gamma)(\beta-p)/\beta p-(n-\alpha)/\beta}} \leq$$

$$\leq c(n,\Omega)\left[\int_{\Omega} \frac{F^p(y)\,dy}{|x-y|^{n-\alpha}}\right]^{1/\beta} \cdot \left[\int_{\Omega} \frac{F^p(y)\,dy}{|x-y|^{n-\gamma}}\right]^{(\beta-p)/\beta p} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{[n-1-(n-\gamma)(\beta-p)/\beta p-(n-\alpha)/\beta]q}}\right]^{1/q} \leq c(n,\Omega)A(x)^{1/\beta}B(x)C(x)$$

donde $1/p+1/q=1$.

$C(x)$ está acotado porque $\alpha < \alpha_o$ implica que

$[n-1-(n-\gamma)(\beta-p)/\beta p-(n-\alpha)/\beta]\, q < n$

Por otro lado, como $t^{\gamma-\varepsilon}\,\varphi^{\,p}(t)$ no decrece, usando la proposición 5.1 ii) se concluye que

$$B(x) \leq c\, |\|f\||^{(\beta-p)/\beta p}$$

siendo $|\|f\|| = \|f\| + \sum_{j=1}^{n} \|\partial/\partial x_j\, f\|$

Para estimar $A(x)$, basta ver que de las desigualdades que involucran a α, β, p, se desprende $\alpha \leq p$. En efecto

$$p = p-\gamma+\gamma = -p\frac{(\gamma-p)}{p} + \gamma \geqslant -\beta\,\frac{(\gamma-p)}{p} + \gamma = \beta\,\frac{(p-\gamma)}{p} + \gamma =$$

$$= \beta\,(1-\gamma/p) + \gamma = \alpha_0 > \alpha$$

Como $t^p \varphi^p(t)$ es no creciente, resulta que $t^{\alpha}\varphi^p(t)$ no crece. Entonces usando la proposición 5.1 i) se concluye que $A(x)$ pertenece a $M^1_{t^{\alpha}\varphi^p}(\Omega)$. Por lo tanto, para $x_0 \in \Omega$ y $\varrho \leq \varrho_0$ se tiene

$$\int_{B(x_0,\varrho)\cap\Omega} |f(x)|^{\beta}\,dx \leq c\,\||f\||^{(\beta-p)/p} \int_{B(x_0,\varrho)\cap\Omega} A(x)\,dx \leq$$

$$\leq c\,\||f\||^{(\beta-p)/p+p}\,\varrho^{\,n+\alpha}\,\varphi^p(\varrho)$$

En consecuencia $f(x) \in M^{\beta}_{t^{\alpha/\beta}\varphi^{p/\beta}}(\Omega)$ para $\alpha < \alpha_0$.

Finalmente, se considera el caso $\beta < p$. Para $\beta = p$ se obtiene del paso anterior que $f(x) \in M^p_{t^{\alpha/p}\varphi}(\Omega)$. Como se tiene

$$t^{\alpha/p}\varphi(t) \leq (t^{\alpha/p}\varphi(t))^{p/\beta} = t^{\alpha/\beta}\,\varphi^{p/\beta}(t) \text{ cerca del origen,}$$

resulta $f(x) \in M^{\beta}_{t^{\alpha/\beta}\varphi^{p/\beta}}(\Omega)$ para $\alpha < \alpha_0$, $\beta < \beta^*$.

ii) Sea $p-\varepsilon < \alpha < p$. Se puede estimar, como en la parte i)

$$|f(x)| \leq c(n,\Omega)\; A(x)\; B(x)\; C(x)$$

Si se toma $\beta > p$ y $\gamma = p$, entonces

$$\left[n-1-(n-\alpha)/\beta - (n-\gamma)(\beta-p)/\beta p\right] q < n$$

y $C(x)$ está acotado. Lo mismo ocurre con $A(x)$ y $B(x)$ pues $t^{\gamma}\varphi^{p}(t)$ y $t^{\alpha}\varphi^{p}(t)$ no decrecen. Con esto queda probada la proposición 5.2.

<u>Observación 5.1</u>: Si $f(x)$ junto con las derivadas hasta el orden k pertenecen a $M^{p}_{\varphi}(\Omega)$, aplicando sucesivamente la proposición 5.2, se obtiene que $f(x) \in M^{\beta}_{t^{\alpha/\beta}\varphi^{p/\beta}}(\Omega)$ para $\beta < \beta^{**} = p\gamma/(\gamma-kp)$, $\alpha < \alpha_0$, siempre que $\varphi(t)$ y $t^{kp}\varphi^{p}(t)$ sean no crecientes y existan $\gamma > kp, \varepsilon > 0$, tal que $t^{\gamma-\varepsilon}\varphi^{p}(t)$ sea no decreciente.

6. Relación con los espacios de Orlicz:

Las funciones de $L^{p,\lambda}$, $\lambda > 0$, están en $S'(R^n)$. En efecto, basta observar que para $f(x) \in L^{1,\lambda}$ se tiene que $(1+|x|)^{-\lambda-\varepsilon}f(x)$ pertenece a $L^1(R^n)$ cualquiera sea $\varepsilon > 0$:

Sea $B_j = B(0,2^j)$. Entonces

$$\int_{R^n} (1+|x|)^{-\lambda-\varepsilon}|f(x)|\,dx = \int_{B_1} (1+|x|)^{-\lambda-\varepsilon}|f(x)|\,dx +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_{j+1}\setminus B_j} (1+|x|)^{-\lambda-\varepsilon}|f(x)|\,dx \leq \| f \| + \sum_{j=1}^{\infty} (1+2^j)^{-\lambda-\varepsilon}\int_{B_{j+1}}|f(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \|f\| \left(1 + \sum_{j=1} (1+2^j)^{-\lambda-\varepsilon}\, 2^{(j+1)\lambda} \right)$$

Como esta serie converge, resulta lo afirmado.

También se sabe que ciertas funciones de $L^{p,\lambda}(\Omega)$ están en alguna clase de Orlicz. Trudinger [16] probó que si Ω tiene la propiedad del cono y tanto f(x) como sus primeras derivadas están en $L^{1,n-1}(\Omega)$ entonces f(x) es exponencialmente integrable en Ω . Para los $M^p_\varphi(\Omega)$ se tiene:

<u>Proposición 6.1</u>: Sean $\Omega \subset R^n$ acotado con la propiedad del cono y $\varphi(t)$ una función no creciente tal que $t\,\varphi(t)$ es no decreciente. Entonces, si $f(x) \in M^p_\varphi(\Omega)$ y $\partial/\partial x_j\, f(x) \in M^p_\varphi(\Omega)$, $1 \leq j \leq n$, resulta ser f(x) exponencialmente integrable en Ω .

<u>Demostración</u>: Se concluye del resultado de Trudinger. Basta observar que $f(x) \in M^1_{t^{-1}}(\Omega)$. En efecto

$$\int_{B(x_0,\varsigma)\cap\Omega} |f(x)|\,dx \leq \left[\int_{B(x_0,\varsigma)\cap\Omega} |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} |B(x_0,\varsigma)|^{1/q} \leq$$

$$\leq c\ \|f\|\ |B(x_0,\varsigma)|^{1/p}\varphi(\varsigma)\ |B(x_0,\varsigma)|^{1/q} = c\,\|f\|\,|B(x_0,\varsigma)|\ \varphi(\varsigma) =$$

$$= c\,\|f\|\ |B(x_0,\varsigma)|\ \varsigma\,\varphi(\varsigma)\ 1/\varsigma \leq c\,\|f\|\ \varsigma_0\,\varphi(\varsigma_0)\,|B(x_0,\varsigma)|\ 1/\varsigma$$

<u>Observación 6.1</u>: Cuando $p \neq 1$, en los $L^{p,\lambda}(\Omega)$, la condición impuesta a la función $\varphi(t)$ equivale a pedir $\lambda \geq n-p$.

Para n=1, como $0 < \lambda < 1$, es siempre cierto que $\lambda \geq 1-p$. Entonces el resultado es válido para cualquier $L^{p,\lambda}(\Omega)$ y $M^p_\varphi(\Omega)$ con $\varphi(t)$ no creciente.

Cuando $n > 1$ el resultado no es cierto para $\lambda < n-p$. En efecto, si se toman las funciones $f_m(x)=1/|x|^m$, $m < n$, definidas en B(0,1), se tiene que $f_m(x) \in L^{1,n-m}(B(0,1))$ y $\partial/\partial x_j f_m(x)$ pertenece a $L^{1,n-m-1}(B(0,1))$ para $1 \leq j \leq n$. Entonces $f_m(x)$ y sus primeras derivadas pertenecen a $L^{1,n-m-1}(B(0,1))$ pero $f_m(x)$ no pertenece a

$L^q(B(0,1))$ si $q > n/m$.

En las condiciones anteriores, no sólo se tiene que $f(x)$ es exponencialmente integrable, sino también que las exponenciales de $f(x)$ están en algún $M^q(\Omega')$:

<u>Proposición 6.2</u>: Sean Ω con la propiedad del cono, $\Omega' \subset \Omega$ tal que si $\delta_0' = \text{diám}\,\Omega'$ resulta que $B(x,\delta_0') \subset \Omega$ para todo $x \in \Omega'$, $\varphi(t)$ no creciente tal que $t\varphi(t)$ es no decreciente, $f(x) \in M^1_\varphi(\Omega)$ y $\partial/\partial x_j f(x) \in M^1_\varphi(\Omega)$ para $1 \leq j \leq n$. Entonces $e^{b|f|}$ pertenece a $M^s_{t^{1/s}\varphi^{1/s}}(\Omega')$ para $s \geq 1$, $b < (cs\|f\|e)^{-1}$ donde c es una constante positiva.

<u>Demostración</u>: Dado $q > 1$, se obtiene una estimación para $\|f\|_{L^q(B(x_0,\delta)\cap\Omega')}$ con $x_0 \in \Omega'$ y $\delta \leq \delta_0'$.

Sea r tal que $1/r+1/q=1$. Si $\|g\|_{L^r(B(x_0,\delta)\cap\Omega')} = 1$, del lema 5.1 y la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\int_{B(x_0,\delta)\cap\Omega'} |f(x)g(x)|\,dx \leq c(n,\Omega) \int_{B(x_0,\delta)\cap\Omega'} |g(x)| \int_{B(x_0,\delta)} \frac{F(\xi)}{|x-\xi|^{n-1}}\,d\xi\,dx \leq$$

$$\leq c(n,\Omega)\left[\iint_{B(x_0,\delta)} \frac{F(\xi)\,d\xi\,dx}{|x-\xi|^{n-1/q}}\right]^{1/q} \cdot \left[\int_{B(x_0,\delta)\cap\Omega'} |g(x)|^r\,dx\right. \cdot$$

$$\cdot \left.\int_{B(x_0,\delta)} \frac{F(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-1-1/q}}\right]^{1/r} = c(n,\Omega).A.B$$

Para A se tiene

$$A^q \leqslant \int_{B(x_o,\rho)} F(\xi)d\xi \int_{B(\xi,2\rho)} \frac{dx}{|x-\xi|^{n-1/q}} \leqslant c\, q\, \rho^{1/q} \int_{B(x_o,\rho)} F(\xi)d\xi \leqslant$$

$$\leqslant c\, q\, \rho^{1/q}\, |\|f\||\, \rho^n \varphi(\rho) \qquad (6.1)$$

siendo $|\|f\|| = \|f\| + \sum_{j=1}^{n} \|\partial/\partial x_j f\|$

Para estimar B, sea

$$v_x(r) = \int_{B(x_o,\rho)\cap B(x,r)} F(\xi)d\xi \leqslant c\, |\|f\||\, r^n \varphi(r)$$

Entonces

$$\int_{B(x_o,\rho)} \frac{F(\xi)d\xi}{|x-\xi|^{n-1-1/q}} \leqslant \int_0^{2\rho} \frac{v_x'(r)\ dr}{r^{n-1-1/q}} = \left.\frac{v_x(r)}{r^{n-1-1/q}}\right|_0^{2\rho} +$$

$$+ (n-1-1/q)\int_0^{2\rho} \frac{v_x(r)dr}{r^{n-1/q}} \leqslant \frac{c\, |\|f\||\, \rho^n \varphi(\rho)}{\rho^{n-1-1/q}} - \left.\frac{v_x(r)}{r^{n-1-1/q}}\right|_{r=0} +$$

$$+ (n-1-1/q)\, |\|f\||\int_0^{2\rho} \frac{r^n \varphi(r)dr}{r^{\,n-1/q}}$$

Como $t\varphi(t)$ no decrece y el segundo término puede acotarse por $c\,|\|f\||\, r^{1+1/q}\varphi(r)$, éste se anula. Entonces se obtiene

$$\int_{B(x_o,\rho)} \frac{F(\xi)d\xi}{|x-\xi|^{n-1-1/q}} \leqslant c\left[\rho\,\rho^{1/q}\varphi(\rho)\,|\|f\|| + (n-1-1/q)q\, |\|f\||\, \rho\varphi(\rho)\rho^{1/q}\right]$$

$$\leqslant c\, |\|f\||\, q\, \rho^{1/q} \qquad (6.2)$$

De (6.1) y (6.2) se concluye:

$$\|f\|_{L^q(B(x_0,\rho)\cap\Omega')} \leq c(n,\Omega)\,\big\|\|f\|\big\|_q\, \rho^{1/q}\rho^{n/q}\varphi^{1/q}(\rho)$$

Por otro lado se tiene para $s \geq 1$

$$\int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega'} \sum_{j=2}^{N} \frac{(bs\,|f(x)|\,)^j}{j!}\,dx = \sum_{j=2}^{N} \frac{(bs)^j}{j!} \int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega'} |f(x)|^j dx \leq$$

$$\leq \sum_{j=2}^{N} \frac{(bs)^j}{j!} (c\,\big\|\|f\|\big\|)^j \rho\, \rho^n \varphi(\rho)\; j^j = \rho^n\rho\varphi(\rho)\sum_{j=2}^{N} \frac{(bsjc\,\big\|\|f\|\big\|)^j}{j!}$$

Como esta última serie converge para $b < (sc\,\|f\|\,e\,)^{-1}$, usando el lema de Fatou se tiene

$$\int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega'} (e^{b|f(x)|})^s\, dx \leq c\; \rho^n\rho\varphi(\rho)$$

Con lo cual $e^{b|f(x)|} \in M^s_{t^{1/s}\varphi^{1/s}}(\Omega')$ para $s \geq 1$ y $b < (sc\,\big\|\|f\|\big\|\,e)^{-1}$.

7. Representación de $\mathcal{M}^p_{\varphi,0}(\Omega)$ como espacio dual.

No se sabe describir el dual de los espacios de Morrey, pero sí se puede ver que estos son duales de otros espacios. Ya L. Fefferman probó que BMO es el dual del espacio de Hardy H^1. También se tiene el resultado que describe al espacio BMO como el dual de los espacios $H^{1,p}$ definidos a partir de átomos $a(x)$ soportados en un cubo Q que cumplen

$$\|a\|_p \leq |Q|^{1/p-1}$$

Motivado por esto se define para $1<p<\infty$ y $B(x_o,\rho)$, el espacio $\mathcal{a}^{p,\varphi}_{B(x_o,\rho)}$ formado por las funciones $a(x)$ tal que

i) sop $a\subset B(x_o,\rho)$

ii) $\int a(x)dx = 0$

iii) $\|a\|_p \leq \dfrac{1}{|B(x_o,\rho)|^{1/q}\varphi(\rho)}$ siendo $1/p+1/q=1$

Sea $\mathcal{a}^{p,\varphi}=\bigcup_{B(x_o,\rho)} \mathcal{a}^{p,\varphi}_{B(x_o,\rho)}$. Se define $H^{p,\varphi}$ como el conjunto de las funciones $f(x)$ tal que

$$f(x) = \sum_{i\in I}\lambda_i\, a_i(x)$$

con $a_i\in \mathcal{a}^{p,\varphi}$, $\sum_{i\in I}|\lambda_i|<\infty$ y la convergencia de la serie es en el sentido de las distribuciones. Para $f(x)\in H^{p,\varphi}$ se define

$$\|f\|_{H^{p,\varphi}} = \inf\Big(\sum_{i\in I}|\lambda_i|\Big)$$

tomándose el ínfimo sobre todas las descomposiciones atómicas de $f(x)$.

<u>Proposición 7.1</u>: Sea $1<p<\infty$ y $1/p+1/q=1$. Si $\varphi(t)$ es no creciente y $t^n\varphi^q(t)$ es no decreciente, entonces $H^{p,\varphi}$ es un espacio de Banach.

<u>Demostración</u>: $\|\ \|_{H^{p,\varphi}}$ claramente define una norma. Sólo debe probarse que $H^{p,\varphi}$ es completo:

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $H^{p,\varphi}$ es posible extraer una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que cumpla

$$\|f_{n_k}-f_{n_{k-1}}\|_{H^{p,\varphi}} \leq 2^{-k}$$

A partir de esta nueva sucesión se define

$$f = f_{n_1} + \sum_{k \geq 2} (f_{n_k} - f_{n_{k-1}})$$

Esta función f es un elemento de $H^{p,\varphi}$. En efecto, como $f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$ pertenece a $H^{p,\varphi}$ es posible hallar para cada k una descomposición atómica tal que

$$f_{n_k} - f_{n_{k-1}} = \sum_i \lambda_i^k \; a_i^k$$

con

$$\sum_i |\lambda_i^k| \leq \| f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \|_{H^{p,\varphi}} + 2^{-k}$$

Entonces

$$\sum_{k \geq 2} (f_{n_k} - f_{n_{k-1}}) = \sum_{k \geq 2} \sum_i \lambda_i^k a_i^k$$

Y se tiene

$$\sum_{k \geq 2} \sum_i |\lambda_i^k| \leq \sum_{k \geq 2} (\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_{H^{p,\varphi}} + 2^{-k}) \leq \sum_{k \geq 2} (2^{-k} + 2^{-k}) < \infty$$

Por lo tanto la función f tiene una descomposición atómica. Además la serie que la define converge en la norma de $H^{p,\varphi}$ y en consecuencia también converge en el sentido distribucional, pues si ψ es una función de prueba soportada en $B(x_1,\delta_1)$ y a es un átomo con soporte en $B(x,\delta)$ se tiene

$$\left| \int a(x)\psi(x)dx \right| \leq \|a\|_p \|\psi\|_q \leq \frac{1}{|B(x,\delta)|^{1/q}\varphi(\delta)} \left(\int_{B(x,\delta)\cap B(x_1,\delta_1)} |\psi(x)|^q \right)^{1/q}$$

Si $\delta \leq \delta_1$ resulta $\varphi(\delta) \geq \varphi(\delta_1)$ y entonces

$$\left| \int a(x)\psi(x)dx \right| \leq \frac{1}{|B(x,\delta)|^{1/q}\varphi(\delta_1)} \|\psi\|_\infty \; |B(x,\delta)|^{1/q} = \frac{\|\psi\|_\infty}{\varphi(\delta_1)}$$

Si $\rho \geq \rho_1$ resulta $\rho_1^{n/q}\varphi(\rho_1) \leq \rho^{n/q}\varphi(\rho)$ y por lo tanto

$$\left|\int a(x)\psi(x)dx\right| \leq \frac{1}{|B(x,\rho_1)|^{1/q}\varphi(\rho_1)} \|\psi\|_\infty \; |B(x,\rho_1)|^{1/q} = \frac{\|\psi\|_\infty}{\varphi(\rho_1)}$$

Si ahora $g \in H^{p,\varphi}$ y $\varepsilon > 0$, tomando una descomposición atómica $\sum_i \lambda_i a_i$ tal que

$$\sum_i |\lambda_i| \leq \|g\|_{H^{p,\varphi}} + \varepsilon$$

resulta

$$\left|\int g(x)\psi(x)dx\right| \leq (\|g\|_{H^{p,\varphi}} + \varepsilon) \frac{\|\psi\|_\infty}{\varphi(\rho_1)}$$

Como ε es arbitrario se tiene

$$\left|\int g(x)\psi(x)\,dx\right| \leq c\,\|g\|_{H^{p,\varphi}} \quad , \quad c = c(\varphi,\psi)$$

En consecuencia la convergencia en $H^{p,\varphi}$ implica la convergencia en el sentido de las distribuciones.

Por la forma en que fue construída f resulta que la sucesión $\{f_n\}$ converge a f en la norma de $H^{p,\varphi}$. Queda probada la prop. 7.1.

Se tiene el siguiente resultado de dualidad:

Proposición 7.2: Sea $\varphi(t) > 0$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Para toda $L \in (H^{p,\varphi})^*$ existe $g(x) \in \mathfrak{M}^q_{\varphi,0}$ tal que para toda función $h(x)$ en $H^{p,\varphi}$ se tiene

$$L(h) = \int g(x)\,h(x)\,dx$$

Además, si $f(x) \in \mathfrak{M}^q_{\varphi,0}$ y $h(x) \in H^{p,\varphi}$, $\int f(x)\,h(x)\,dx$ define un elemento de $(H^{p,\varphi})^*$.

Demostración: La última afirmación es sencilla. Dada $f(x) \in \mathfrak{M}^q_{\varphi,0}$ y $a(x)$ un átomo de $\mathfrak{a}^{p,\varphi}_{B(x_0,\rho)}$ resulta

$$\int a(x)\, f(x)\, dx = \int a(x) \left[f(x) - c(x_o,\delta) \right] dx$$

siendo $c(x_o,\delta)$ la constante correspondiente a $B(x_o,\delta)$ que realiza el ínfimo en (2.2). Entonces

$$\left| \int a(x) f(x) dx \right| \leq \|a\|_p \left(\int_{B(x_o,\delta)} |f(x) - c(x_o,\delta)|^q\, dx \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|B(x_o,\delta)|^{1/q}\varphi(\delta)} \|f\|\, |B(x_o,\delta)|^{1/q}\varphi(\delta) = \|f\|$$

Si ahora $h(x) \in H^{p,\varphi}$, dado $\varepsilon > 0$ sea $\sum_i \lambda_i\, a_i$ una descomposición atómica de h tal que $\sum_i |\lambda_i| \leq \|h\|_{H^{p,\varphi}} + \varepsilon$. Entonces

$$\left| \int h(x) f(x) dx \right| \leq \sum_i |\lambda_i| \int |a_i(x) f(x)|\, dx \leq \left(\|h\|_{H^{p,\varphi}} + \varepsilon\right) \|f\|_{\mathfrak{M}^q_{\varphi,0}} .$$

Haciendo tender ε a cero se obtiene la inclusión $\mathfrak{M}^q_{\varphi,0} \subset (H^{p,\varphi})^*$

Para la otra inclusión, se comienza viendo que $(H^{p,\varphi})^* \subset L^q_{loc}$:

Dada $L \in (H^{p,\varphi})^*$, sea B_k una sucesión creciente de bolas, y T_k la restricción de R^n a B_k. Entonces $L \circ T_k \in (L^p_o(B_k))^*$, siendo $L^p_o(B_k)$ las funciones de $L^p(B_k)$ con promedio cero. En efecto, si $f(x) \in L^p_o(B_k)$

$$|L(f)| \leq \|L\|_{(H^{p,\varphi})^*} \|f\|_{H^{p,\varphi}} \leq \|L\|_{(H^{p,\varphi})^*} \|f\|_p |B(x_o,\delta)|^{1/q}\varphi(\delta)$$

Como $(L^p_o(B_k))^* = L^q(B_k)/C(B_k)$,($C(B_k)$=constantes en B_k) , existe $g_k \in L^q(B_k)$ tal que $L(f) = \int f(x)\, g_k(x)\, dx$. Como los conjuntos

B_k son crecientes

$$L(f) = \int_{B_k} g_{k+1}(x)\ f(x)dx$$

y en consecuencia $T_k(g_{k+1}) = g_k$. Entonces existe una función $g(x) \in L^q_{loc}(R^n)/C(R^n)$ que representa a L.

Ahora sólo resta ver que si $g(x) \in L^q_{loc}$ es una transformación de $(H^{p,\varphi})^*$, entonces $g(x)$ pertenece a $\mathcal{M}^q_{\varphi,0}$:

Se sabe, (ver [7]), que para toda $B(x_o,\delta)$ se cumple

$$\left|\left\{x \in B(x_o,\delta) \ / \ g(x) < c(x_o,\delta)\right\}\right| \leq 1/2\,|B(x_o,\delta)|$$

$$\left|\left\{x \in B(x_o,\delta) \ / \ g(x) > c(x_o,\delta)\right\}\right| \leq 1/2\,|B(x_o,\delta)|$$

Se supone sin pérdida de generalidad que

$$\int_{B(x_o,\delta)\cap\{g(x)>c(x_o,\delta)\}} |g(x)-c(x_o,\delta)|^q \geq \int_{B(x_o,\delta)\cap\{g(x)\leq c(x_o,\delta)\}} |g(x)-c(x_o,\delta)|^q\, dx$$

Para simplificar, se notará $A=B(x_o,\delta)\cap\{g(x) > c(x_o,\delta)\}$ y $B=B(x_o,\delta)\cap\{g(x) \leq c(x_o,\delta)\}$.

Se define un átomo $a(x)$ soportado en $B(x_o,\delta)$ que vale $\left[g(x)-c(x_o,\delta)\right]^{q-1}$ en A y en el resto una constante que resulta de pedir que el promedio de $a(x)$ se anule. Se tiene

$$\int_{B(x_o,\delta)} |g(x)-c(x_o,\delta)|^q dx \leq 2 \int_A |g(x)-c(x_o,\delta)|^q\, dx =$$

$$=2\int_A (g(x)-c(x_o,\varrho))\ a(x)\ dx \leq 2\int g(x)a(x)dx \leq 2\|g\|_{(H^{p,\varphi})^*}\|a\|_{H^{p,\varphi}}$$

Ahora bien,

$$\|a\|_{H^{p,\varphi}} \leq \|a\|_p |B(x_o,\varrho)|^{1/q}\varphi(\varrho) \leq |B(x_o,\varrho)|\varphi(\varrho)\left[\frac{1}{|B(x_o,\varrho)|}\int |a(x)|^p dx\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq |B(x_o,\varrho)|\varphi(\varrho)\left[\frac{1}{|B(x_o,\varrho)|}\int_A |g(x)-c(x_o,\varrho)|^{p(q-1)}\ dx\ +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{|B(x_o,\varrho)|}\int_B c^p dx\right]^{1/p}$$

Pero

$$\frac{1}{|B(x_o,\varrho)|}\int_B c^p\ dx \leq \left[\frac{1}{|B|}\int_B c\ dx\right]^p =$$

$$=\left[\frac{1}{|B|}\int_A |g(x)-c(x_o,\varrho)|^{q-1} dx\right]^p \leq \frac{1}{|B|}\int_A |g(x)-c(x_o,\varrho)|^q\ dx$$

Por lo tanto

$$\|a\|_{H^{p,\varphi}} \leq |B(x_o,\varrho)|\varphi(\varrho)\left[\frac{c}{|B(x_o,\varrho)|}\int_A |g(x)-c(x_o,\varrho)|^q dx\right]^{1/p}$$

Y entonces

$$\left[\int_{B(x_0,\rho)} |g(x)-c(x_0,\rho)|^q \, dx\right]^{1/q} \leq c|B(x_0,\rho)|^{1/q}\varphi(\rho)$$

Observación 7.1: Se puede definir $H^{p,\varphi}(\Omega)$ para $\Omega \subset R^n$ abierto y acotado, mediante los átomos a(x) soportados en $B(x_0,\rho)\cap\Omega$, tal que

$$\|a\|_p \leq \frac{1}{|B(x_0,\rho)|^{1/q}\varphi(\rho)}$$

También en este caso se obtiene con el mismo razonamiento que $(H^{p,\varphi}(\Omega))^* = \mathcal{M}^q_{\varphi,0}(\Omega)$.

8. Operadores construídos a partir de funciones de $\mathcal{M}^p_{\varphi,0}$.

G. David y L. Journé ([4]), al caracterizar los operadores asociados a un núcleo standard, que se extienden a operadores acotados en L^2, definen, para $\alpha \in BMO$, el operador:

$$Lf = \int_0^\infty Q_t\left[(Q_t\alpha)\ P_tf\right]\frac{dt}{t} \qquad\qquad f\in S(R^n)$$

donde $P_t = \eta_t *$, $\eta_t = t^{-n}\eta(x/t)$, $\eta(x)\in C_0^\infty(R^n)$ radial, soportada en $B(0,1)$, $\int\eta(x)dx = 1$ y $Q_t = -t\frac{d}{dt}P_t = \Psi_t *$, con $\Psi = \sum_1^n \partial/\partial x_j(x_j\eta)$ que resulta estar soportada en B(0,1) y su integral vale cero.

Este operador resulta ser de Calderón-Zygmund y además $L(1) = c\alpha$ y $L^t(1) = 0$. Interesa estudiar qué es lo que sucede si en lugar de tomar $\alpha\in BMO$, se toma $\alpha\in\mathcal{M}^p_{\varphi,0}$, con $\varphi(t)$ no creciente, $\varphi(t)\longrightarrow\infty$ si $t\longrightarrow 0$, $t^n\varphi^p(t)$ no decreciente que tiende a ∞ cuando $t\longrightarrow\infty$.

Para $f\in S(R^n)$, (f indefinidamente derivable de decrecimiento rápido con todas sus derivadas), se llama

$$L_m f = \int_{1/m}^{m} Q_t\left[(Q_t\alpha)P_t f\right]\frac{dt}{t}$$

Si $g \in S(R^n)$

$$(L_m f, g) = \int_{1/m}^{m}\int K_t(x,y)\ f(y)\ g(x)\ dy\ dx\ \frac{dt}{t}$$

donde

$$K_t(x,y) = \int Q_t\alpha(u)\ \eta_t(u-y)\ \Psi_t(u-x)\ du$$

Es decir que el operador L_m está asociado al núcleo

$$K_m(x,y) = \int_{1/m}^{m} K_t(x,y)\ \frac{dt}{t}$$

Lo primero que se observa, es que se hace necesario modificar la medida en t, para que estos núcleos sean núcleos standard. Se define

$$L'_m f = \int_{1/m}^{m} Q_t\left[(Q_t\alpha)\ P_t f\right]\frac{dt}{t\varphi(t)}$$

Estos operadores están asociados a los núcleos

$$K'_m(x,y) = \int_{1/m}^{m} K_t(x,y)\ \frac{dt}{t\varphi(t)}$$

Como $\int \psi(x)dx = 0$, se tiene

$$|Q_t\alpha(x)| \leqslant t^{-n} \int_{|y|\leqslant t} |\psi(y/t)|\,|\alpha(x-y)-c(0,t)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant ct^{-n}\, t^{n/q}\, \|\alpha\|\, t^{n/p}\, \varphi(t) = c\,\|\alpha\|\varphi(t)$$

En consecuencia

$$\|Q_t\alpha\|_\infty \leqslant c\,\|\alpha\|\,\varphi(t)$$

Por lo tanto, como $1 \leqslant 1 + \frac{|x-y|}{t} \leqslant 3$, se tiene para $N \geqslant 1$

$$|K_t(x,y)| \leqslant c\,\|\alpha\| t^{-n}\varphi(t) \leqslant c\,\|\alpha\| t^{-n}\varphi(t)(1+\frac{|x-y|}{t})^{-N}$$

Eligiendo N=n+1

$$\left|\int_{1/m}^{m} K_t(x,y)\,\frac{dt}{t\,\varphi(t)}\right| \leqslant c\,\|\alpha\|\,|x-y|^{-n}$$

Es decir, se tiene

$$|K_m'(x,y)| \leqslant c\,\|\alpha\|\,|x-y|^{-n}$$

Análogamente, se obtiene para los gradientes

$$|\nabla_x \nabla_y K_m'(x,y)| \leqslant c\,\|\alpha\|\,|x-y|^{-n-1}$$

Entonces los K'_m son núcleos standard con acotaciones independientes de m. Además convergen uniformemente a $K(x,y)$ sobre los compactos de R^{2n} que no intersecan la diagonal.

Si ahora $p \geq 2$ se estiman las normas en L^2 de los L'_m. Sean $f, g \in S(R^n)$, entonces

$$\left|(L'_m f, g)\right| = \left|\int_{1/m}^{m} (Q_t\alpha\, P_t f,\ Q_t g)\ \frac{dt}{t\varphi(t)}\right| =$$

$$= \left|\int_{1/m}^{m} \int Q_t\alpha(x)\ P_t f(x)\ Q_t g(x)\ dx\ \frac{dt}{t\varphi(t)}\right| \leq$$

$$\leq \left[\int_{1/m}^{m} \int |Q_t g(x)|^2\ dx\ \frac{dt}{t}\right]^{1/2} \left[\int_{1/m}^{m} \int |Q_t\alpha(x)|^2 |P_t f(x)|^2 dx\ \frac{dt}{t\ \varphi^2(t)}\right]^{1/2} \tag{8.1}$$

Como $g \in L^2$ y $Q_t = \Psi_t *$ se tiene (ver [17])

$$\int_{1/m}^{m} |Q_t g(x)|^2\ dx\ \frac{dt}{t} \leq (\|g\|_2)^2 \tag{8.2}$$

Además $|Q_t\alpha(x)|^2 dx\ \dfrac{dt}{t\ \varphi^2(t)}$ es una medida de Carleson, es decir, cualquiera sea el cubo $Q \subset R^{n+1}_+ = \{(x,t) \in R^{n+1},\ x \in R^n,\ t > 0\}$ con base en $\{t = 0\}$ y arista $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\int_Q |Q_t\alpha(x)|^2\ dx\ \frac{dt}{t\ \varphi^2(t)} \leq c\ \varepsilon^n$$

Se ve esto:

Sea Q un cubo de R^{n+1}_+ apoyado en $\{t=0\}$ de lado ε y puesto en el origen. Sea S una esfera tal que $S \supset Q$ y tal que la distancia de $\bar{Q}$ al complemento de S sea ε. Se descompone $\alpha - c_S = \alpha_1 + \alpha_2$ siendo $\alpha_1 = (\alpha - c_S)\chi_S$ y donde c_S es la constante asociada a S y χ_S la función característica de S. Entonces

$$\int_{t\leq\varepsilon}\int_{|x|\leq\varepsilon}|Q_t\alpha(x)|^2\,dx\,\frac{dt}{t\varphi^2(t)} \leq \frac{1}{\varphi^2(\varepsilon)}\int_{t\leq\varepsilon}\int_{|x|\leq\varepsilon}|Q_t\alpha(x)|^2dx\,\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{\varphi^2(\varepsilon)}\int_{t\leq\varepsilon}\int_{|x|\leq\varepsilon}|Q_t\alpha_1(x)|^2\,dx\,\frac{dt}{t} \leq \frac{1}{\varphi^2(\varepsilon)}\int_{R^{n+1}}|Q_t\alpha_1(x)|^2dx\,\frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varphi^2(\varepsilon)}\int_{R^n}|\alpha_1(x)|^2dx = \int_S|\alpha(x) - c_S|^2\,dx \leq c\|\alpha\|^2\,\varepsilon^n$$

lo que prueba lo afirmado.

Entonces, al ser $|Q_t\alpha(x)|^2\,dx\,\dfrac{dt}{t\,\varphi^2(t)}$ una medida de Carleson y P_t el operador de convolución con la función η_t, se tiene (ver [17])

$$\int_{1/m}^{m}\int|P_tf(x)|^2\,|Q_t\alpha(x)|^2\,dx\,\frac{dt}{t\,\varphi^2(t)} \leq c\,\|\alpha\|^2\|f\|_2^2 \qquad (8.3)$$

Reemplazando (8.2) y (8.3) en (8.1) se obtiene

$$|(L_m' f, g)| \leq c\,\|\alpha\|\,\|f\|_2\,\|g\|_2$$

Es decir

$$\|L_m' f\|_2 \leq c\,\|\alpha\|\,\|f\|_2$$

Y por lo tanto

$$\| L'f\|_2 \leq c \|\alpha\| \|f\|_2$$

En consecuencia, se tiene que L'es un operador de Calderón-Zygmund que cumple $L'^{t}(1) = 0$. En el caso de $\alpha \in BMO$, $L(1) = c\alpha$, pero por la caracterización que hacen G, David y L. Journé en [4], obviamente no se puede cumplir $L'(1) = c\alpha$. Ni siquiera se puede decir que los $L_m'(1)$ convergen siempre.Para ello basta ver qué ocurre con $L_m'(1)$ cuando $\varphi(t)= t^{(\lambda-n)/2}$, $0<\lambda<n$. Al estar L_m' asociado a un núcleo standard, para cada $f \in L^{\infty} \cap C^{\infty}$, $L_m'f$ es una funcional lineal y continua en $\mathcal{D}_0=\{f\in C_0^{\infty} / \int f(x)dx = 0\}$.Entonces debe estimarse $(L_m'(1), g)$ para $g\in \mathcal{D}_0$. Sea $\bar{\eta}(x)$ identidad aproximada tal que (ver [4])

$$Q_t^2 = -c\, t \frac{d}{dt} \bar{P}_t \quad , \qquad \bar{P}_t = \bar{\eta}_t *$$

Se tiene

$$(L_m'(1), g) = \int_{1/m}^{m} ((Q_t\alpha)^2, g)\, t^{(n-\lambda)/2} \frac{dt}{t}$$

$$-c\int_{1/m}^{m} \frac{d}{dt} \bar{P}_t\alpha\, t^{(n-\lambda)/2}\, dt = -ct^{(n-\lambda)/2}\, \bar{P}_t\alpha \Big|_{1/m}^{m} +$$

$$+c\int_{1/m}^{m} (n-\lambda)/2\; t^{(n-\lambda)/2-1}\, \bar{\eta}_t * \alpha\, dt$$

El término integrado se anula si se hace tender m al infinito. Dado que $L^{2,\lambda} = (H^{2,\varphi})^*$ con $\varphi(t)= t^{(\lambda-n)/2}$, basta ver que

$$m^{(n-\lambda)/2}\,\bar{P}_m g \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \qquad y \qquad m^{(\lambda-n)/2}\bar{P}_{1/m}\, g \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

con la convergencia en la norma de $H^{2,\varphi}$. Se verá más adelante que si la función g está soportada en $B(x_0,\delta)$ entonces

$$\|\bar{P}_m g\|_{H^{2,\varphi}} \leqslant \frac{c\ \delta^{\lambda/2}}{(\delta+m)^{\lambda/2}}$$

Por lo tanto si $\lambda > n/2$, $m^{(n-\lambda)/2}\bar{P}_m g$ tiende a cero. También se verá que $\bar{P}_{1/m}g$ converge a g en la norma de $H^{2,\varphi}$. En cosecuencia, como $0<\lambda<n$, $m^{(\lambda-n)/2}\bar{P}_{1/m}\, g$ converge a cero.

El término restante es igual a:

$$c\ (n-\lambda)/2\ \alpha * \int_{1/m}^{m} t^{(n-\lambda)/2-1}\,\bar{\eta}(x/t)\ t^{-n}\,dt$$

Como la función $\bar{\eta}(x)$ es radial se puede hacer un cambio de variables, quedando

$$c\ (n-\lambda)/2\ \alpha * \ |x|^{-(n+\lambda)/2} \int_{1/m}^{m} t^{(n+\lambda)/2-1}\ \bar{\eta}(t)\ dt$$

y esta convolución no siempre existe.

Cuando se reemplaza una función de BMO por otra de $\mathcal{M}^2_{\varphi,0}$ el operador L no parece estar asociado a un núcleo standard, pero sigue siendo cierto que $L(1)= c\alpha$. En efecto, basta ver que $\int_{1/m}^{m} Q_t^{\,2} g \,\frac{dt}{t}$ converge en la norma de $H^{2,\varphi}$ a la función g, cualquiera sea $g \in \mathcal{D}_o$. Como

$$\int_{1/m}^{m} Q_t^2 g \frac{dt}{t} = \bar{P}_m g - \bar{P}_{1/m} g$$

deben estimarse las normas de $\bar{P}_m g$ cuando g es un átomo con soporte en $B(x_o, \rho)$.

$$\| \bar{P}_m g \|_2 = \| \int \bar{\eta}_m(y)\, g(x-y)\, dy \|_2 \leqslant \| \bar{\eta}_m \|_1 \| g \|_2 \leqslant c \| \bar{\eta} \|_1 \frac{1}{\rho^{n/2} \varphi(\rho)} =$$

$$= \frac{\| \bar{\eta} \|_1 (\rho+m)^{n/2} \varphi(\rho+m)}{\rho^{n/2} \varphi(\rho)(\rho+m)^{n/2} \varphi(\rho+m)}$$

Por lo tanto resulta

$$\| \bar{P}_m g \|_{H^2,\varphi} \leqslant c \frac{\rho^{n/2} \varphi(\rho)}{\| \bar{\eta} \|_1 (\rho+m)^{n/2} \varphi(\rho+m)}$$

Como se está trabajando con funciones $\varphi(t)$ no crecientes tal que $t^n \varphi^2(t)$ sea creciente, las normas se anulan en el infinito.

Se ve ahora qué pasa cuando m se aproxima al origen. Supongamos $m < \rho$. Entonces

$$\| \bar{P}_m g - g \|_2 = \| \int \bar{\eta}_m(y)(g(x-y) - g(x))\, dy \|_2 \leqslant \int | \bar{\eta}_m(y) | \| g(x-y) - g(x) \|_2\, dy \leqslant$$

$$\leqslant c \| \bar{\eta} \|_1 \frac{1}{\rho^{n/2} \varphi(\rho)} = c \| \bar{\eta} \|_1 \frac{(m+\rho)^{n/2} \varphi(m+\rho)}{m^{n/2} \varphi(m)(m+\rho)^{n/2} \varphi(m+\rho)}$$

Entonces

$$\| P_m g - g \|_{H^2,\varphi} \leq c \frac{m^{n/2}\,\varphi(m)}{\|\bar{\eta}\|_1 (m+\rho)^{n/2}\varphi(m+\rho)}$$

y esto se anula en el origen.

El paraproducto $\int_0^\infty Q_t(Q_t\alpha)P_t \frac{dt}{t}$ actúa sobre los espacios de Morrey, dejándolos invariantes:

<u>Proposición 8.1</u>: Sea $\alpha \in$ BMO, $Lf = \int_0^\infty Q_t(Q_t\alpha)P_t f \frac{dt}{t}$. El operador L aplica $\mathcal{M}^2_{\varphi,0}$ en sí mismo con continuidad siempre que $\varphi(t)$ cumpla

i) Existe $D>0$ tal que $\varphi(2t) \leq D\varphi(t)$

ii) $\int_\rho^\infty t^{-2}\varphi(t)\,dt \leq c\,\rho^{-1}\varphi(\rho)$

<u>Demostración</u>: Sean $f \in \mathcal{M}^2_{\varphi,0}$, $x_0=0$, $\rho>0$, $c_\rho = \int_{\rho/2}^\infty \int K_t(0,y)f(y)\,dy\,\frac{dt}{t}$ donde $K_t(x,y) = \int Q_t\alpha(u)\,\eta_t(u-y)\,\Psi_t(u-x)\,du$.

Se probará que

$$\left[\int_{|x|\leq\rho} |Lf(x) - c_\rho|^2\,dx\right]^{1/2} \leq c\,\rho^{n/2}\varphi(\rho)$$

Para ello se descompone

$$\left[\int_{|x|\leq\rho} |Lf(x)-c_\rho|^2\,dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_{|x|\leq\rho} \left|\int_0^{\rho/2} Q_t(Q_t\alpha)P_t f(x)\frac{dt}{t}\right|^2 dx\right]^{1/2} +$$

$$+ \left[\int_{|x|\leq\rho} \left|\int_{\rho/2}^\infty \int (K_t(x,y)-K_t(0,y))f(y)\,dy\,\frac{dt}{t}\right|^2 dx\right]^{1/2} = I + II$$

Para estimar I, basta estimar la norma en $L^2(B(0,\rho))$ de

$$\int_0^{\rho/2}\int_{|y|\leq 2\rho} K_t(x,y)f(y)dy\,\frac{dt}{t}$$

pues al ser $|x|\leq\rho$, resulta $|y|\leq |x|+2t\leq 2\rho$. Entonces, dado $g\in L^2(B(0,\rho))$, llamando $f_\rho=\chi_{[B(0,2\rho)]}f-c(0,2\rho)$ y recordando que $|Q_t\alpha(x)|^2dx\,\frac{dt}{t}$ es una medida de Carleson, se tiene

$$\left|\int_0^{\rho/2}(Q_t(Q_t\alpha)P_tf_\rho,g)\,\frac{dt}{t}\right|\leq\int_0^{\rho/2}((Q_t\alpha)P_tf_\rho,Q_tg)\,\frac{dt}{t}\leq$$

$$\leq\left[\int_0^{\rho/2}\int|Q_t\alpha(x)|^2|P_tf_\rho(x)|^2\,dx\,\frac{dt}{t}\right]^{1/2}\left[\int_0^{\rho/2}\int|Q_tg(x)|^2\,dx\,\frac{dt}{t}\right]^{1/2}\leq$$

$$\leq c\,\|\alpha\|\,\|g\|_2\,\|f_\rho\|_2\leq c\,\|\alpha\|\,\|g\|_2\,\|f\|\,(2\rho)^{n/2}\varphi(2\rho)\leq$$

$$\leq c\,D\,\|\alpha\|\,\|g\|_2\|f\|\,\rho^{n/2}\varphi(\rho)$$

Entonces

$$I\leq c\,\|\alpha\|\,\|f\|\,\rho^{n/2}\varphi(\rho)$$

Para estimar II debe acotarse la norma en L^2_y de $\nabla_x K_t(x,y)$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}K_t(x,y)\right|\leq\int\left|\eta_t(u-y)\,t^{-n-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\left(\frac{u-x}{t}\right)Q_t\alpha(u)\right|du$$

Por lo tanto

$$\|\nabla_xK_t(x,y)\|_{L^2_y}\leq c\,\|\alpha\|\,t^{-1}\int|(\nabla_x\psi)_t(u-x)|\left[\int|\eta_t(u-y)|^2dy\right]^{1/2}du\leq$$

$$\leq c\,\|\alpha\|\,t^{-n/2-1}\,\|\nabla\psi\|_1\,\|\eta\|_2$$

Finalmente, si $f_t=\chi_{[B(o,4t)]}f- c(0,4t)$, como $t \geqslant \varrho/2$ implica $|y| \leqslant 4t$, se tiene

$$\int_{\varrho/2}^{\infty} \int |K_t(x,y)-K_t(o,y)|\,|f_t(y)|\,dy\,\frac{dt}{t} \leqslant \int_{\varrho/2}^{\infty} |x|\,\|\nabla_x K_t(x,y)\|_2 \|f_t\|_2 \frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x|\,\|\alpha\|\,\|f\| \int_{\varrho/2}^{\infty} t^{-n/2-1}(4t)^{n/2}\varphi(4t)\,\frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant c\, D^2\,|x|\,\|\alpha\|\,\|f\| \int_{\varrho/2}^{\infty} \varphi(t)\, t^{-2}\, dt$$

Y por lo tanto, usando las propiedades de φ, se tiene

$$II \leqslant c\,\|\alpha\|\,\|f\|\,(\varrho/2)^{-1}\varphi(\varrho/2)\,\varrho^{n/2+1} \leqslant c\,\|\alpha\|\,\|f\|\,\varrho^{n/2}\varphi(\varrho)$$

Si ahora x_o es cualquiera, aplicando lo obtenido a $f(x-x_o)$, se tiene

$$\left(\int_{|x-x_o|\leqslant\varrho} |Lf(x) - c_\varrho|^2\, dx\right)^{1/2} \leqslant c\,\|\alpha\|\,\|f\|\,\varrho^{n/2}\varphi(\varrho)$$

Con esto queda probada la proposición 8.1.

<u>Observación 8.1</u>: Este resultado vale para los espacios de Morrey $\mathcal{L}^{2,\lambda}$, $0 < \lambda < n$, pues en ese caso es $\varphi(t)= t^{(\lambda-n)/2}$ que cumple

$$\int_{\varrho}^{\infty} t^{-2}\, t^{(\lambda-n)/2}\, dt = \frac{2}{n-\lambda+2}\,\varrho^{-1}\,\varrho^{(\lambda-n)/2}$$

<u>Observación 8.2</u>: Si en lugar de tomar $\alpha \in BMO$, se toma $\alpha \in M^2_\theta$, resulta que el operador

$$\int_0^\infty Q_t\,(Q_t\alpha)P_t\,\frac{dt}{t\,\theta(t)}$$

mantiene invariantes los espacios $\mathcal{M}^2_{\varphi,0}$, siempre que φ cumpla las condiciones de la proposición 8.1.

Rafaela, julio de 1985.

J. Alvarez Alonso.

Referencias :

[1] Alvarez Alonso, J.: " The distribution function in the Morrey Space". Proc.Am.Math.Soc. 83, (1981), pp.693-699.

[2] Campanato,S.: "Propietà di una familia de spazi funzionali ". Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 18,(1964),pp. 137-160.

[3] Campanato, S.: "Propietà di incluzioni per spazi di Morrey ". Richerche di Matem. 12,(1963), pp. 68-86.

[4] David,G.-Journé, J. L.: "Une caractérisation des operateurs intégraux singuliers bornés sur $L^2(R^n)$".Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris.

[5] Janson,S.: "On functions with conditions on the mean oscillation". Arkiv för Matematik 14,nº2, (1976),pp. 189-196.

[6] John, F.-Nirenberg, L.: "On functions of bounded mean oscillation". Comm. Pure Appl. Math.,14,(1964),pp. 415-426.

[7] Journé, J. L.: "Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón". Springer Verlag (1983).

[8] Meyers,N.: "Mean oscillation over cubes and Hölder continuity". Proc. AMS, 15, nº5,(1964),pp. 716-721.

[9] Morrey, C.: "Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics". Univ. of California, Publ. 1,(1943).

[10] Peetre,J.: "On the theory of $L^{p,\lambda}$ spaces". Journal of Funct. An. 4, (1964), pp. 71-87.

[11] Sarason, D.: "Functions of vanishing mean oscillation". Trans. of the Am. Math. Soc. 207, (1975), pp.391-405.

[12] Spanne, S.: "Some functions Spaces defined using the mean oscillation over cubes". Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa,19, n 4, (1965),

pp. 593-607.

[13] Spanne, S.: "Sur l'interpolation entre les spaces $\mathcal{L}_k^{p,\phi}$". Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 20, (1966), pp. 625-648.

[14] Stampachia, G.: "$\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$ spaces and interpolation". Comm. Pure Appl. Math. 17, (1964), pp. 293-306.

[15] Strömberg, J.: "Bounded mean oscillation with Orlicz norm and duality of Hardy spaces". Inst. Mittag-Leffler 4, (1975).

[16] Trudinger, N.: "On imbeddings into Orlicz spaces and some applications". Journal of Math. and Mech. 17, n°5, (1967), pp. 473-482.

[17] Stein, E.M.: "Singular Integrals and differentiability properties of functions." Princeton University Press. (1970).